

## Determinação do comportamento de tensões aplicadas a cabos suspensos

Diego Henrique de Souza Chaves<sup>1</sup>  
Iara Campolina Dias Duarte<sup>2</sup>  
Bruno César Masson Miguel<sup>3</sup>  
Esly Ferreira da Costa Junior<sup>4</sup>

### Resumo

Neste trabalho, foi desenvolvida a modelagem e proposta uma nova abordagem que descreve os comportamentos das tensões aplicadas a cabos suspensos por meio de dois pontos de fixação. Esse comportamento foi analisado primeiramente, considerando que os pontos de fixação do cabo estão na mesma altura e posteriormente que esses pontos estão desnivelados. Foi verificado que para ambos os casos os perfis da curva possuem o formato de catenária. Utilizando uma implementação de método de otimização, foi mostrado que é possível definir um valor mínimo ótimo de tensão no cabo, considerando variações do comprimento de arco, ao definir *a priori* o espaçamento horizontal e a altura dos pontos de sustentação da catenária.

**Palavras-chave:** Catenária. Modelagem. Tensão mínima.

### Abstract

*In this paper the modeling was developed and a new approach was proposed that describes the behavior of the tensions applied to suspended cables through two attachment points. This behavior was first analyzed considering that the cable fixing points are at the same height and later that these points are uneven. It was verified that for both the cases the profiles of the curves have the form of catenary. Using an optimization method implementation, it has been shown that it is possible to define an optimal minimum tension value in the cable, considering variations in arc length by defining a priori the horizontal spacing and the height of the catenary fixing points.*

**Keywords:** Catenary. Modeling. Minimum tension.

1 Mestre em Engenharia Química pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Belo Horizonte, MG, Brasil. Professor do Departamento de Engenharia de Controle e Automação da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas), Belo Horizonte. Discente em disciplinas isoladas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFMG. E-mail: diegohschaves@outlook.com

2 Mestre em Engenharia Química pela UFMG. Discente em disciplinas isoladas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFMG. E-mail: iara.campolina@gmail.com

3 Mestre e bacharel em Engenharia Química pela UFMG. E-mail: brunomassonmiguel@hotmail.com

4 Doutor em Ciências em Engenharia Química pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, RJ, Brasil. Professor na Pós-Graduação em Engenharia Química e na Engenharia Mecânica da UFMG. E-mail: esly@deq.ufmg.br

Artigo recebido em 19.04.2018 e aceito em 01.07.2018.

## 1 Introdução

A definição de catenária é uma curva assumida por uma corrente perfeitamente flexível e inextensível, de densidade linear uniforme, suspensa pelas extremidades pela ação de seu próprio peso, conforme Eves (2004, p. 399). Essa curva foi batizada de catenária por Leibniz que é, segundo Simmons (1987), uma palavra de origem latina que significa cadeia.

De acordo com Mendes (2017), o estudo da curva, atualmente conhecida como catenária, teve início com o matemático Galileu Galilei (1564 – 1642). Porém Galileu e Leonardo da Vinci acreditavam que tal curva seria uma parábola. O problema para encontrar a equação que representa essa curva foi considerado um dos mais famosos e difíceis problemas da história do cálculo. Segundo Coll e Dodd (2016), em maio de 1690, Jacob Bernoulli desafiou a comunidade matemática, lançando o problema oficialmente no *Acta eruditorum*. Em 1691, Johann Bernoulli, Huygens e Leibniz resolveram o problema independentemente. Leibniz e Bernoulli utilizaram métodos analíticos, enquanto Huygens solucionou o problema de forma geométrica. No entanto, foi somente em 1757 que Vincenzo Riccati definiu a curva catenária como uma equação hiperbólica. De acordo com Simmons (1987, p. 614), James Bernoulli provou que de todas as formas possíveis que um fio suspenso entre dois pontos fixos poderia ter, a catenária seria a que menor energia potencial possui, pois seu centro de gravidade é mais baixo. Essa descoberta foi muito importante, pois se tratou da primeira evidência de que as configurações reais da natureza são aquelas que minimizam a energia potencial.

Diversas são as aplicações da curva catenária em engenharia e arquitetura. Essa geometria é encontrada em vários projetos arquitetônicos, por exemplo, o aeroporto Dulles International Airport (USA) e o Arco de Pontal em St. Louis. Segundo Ginovart et al. (2017), devido ao seu equilíbrio estético e funcional, essas curvas serviram de inspiração para grandes arquitetos modernistas catalães, como Antoni Gaudi e Cornet (1852-1926) e Cèsar Martinell e Brunet (1888-1973) que usaram essa forma em todos os seus edifícios. Em ferrovias, essas estruturas de cabos suspensos são utilizadas em sistemas de alimentação de energia aérea de bondes elétricos e metrô de superfícies. Outra importante aplicação das propriedades da curva catenária são as linhas de transmissão de energia, onde as torres de transmissão funcionam como os ganchos de sustentação que, dependendo da topografia do terreno, podem não estar situados em uma mesma vertical.

O uso da expressão analítica da catenária para resolver ou formular problemas complexos tem sido utilizado por muitos autores, por exemplo, Mansour et al. (2018), que investigaram as vibrações livres e não amortecidas de cabos suspensos, fornecendo uma solução analítica exata, baseadas na geometria catenária de cabos altamente tensionados (horizontais/inclinados). Já Greco, Impollonia e Cuomo (2014) propõe um procedimento para a análise estática de estruturas de cabos sob diferentes condições de carga, seguindo a teoria da catenária elástica. Such et al. (2009) também mostra o comportamento estático de estruturas tridimensionais de cabos, baseado na solução exata da catenária.

Em alguns casos, para obter resultados aplicáveis mais rapidamente na prática, algumas simplificações são feitas. Talavera (2008) mostra que, mesmo que os cabos das pontes pênseis tenham perfil de catenária, em geral, na prática da engenharia, comumente são usadas aproximações por parábolas. Entretanto, ao contrário do que foi abordado por Talavera (2008), tendo em vista utilizar métodos numéricos mais acurados, não é necessário fazer essa simplificação, dado que a metodologia proposta nesse trabalho permite encontrar a solução do problema, considerando a curva como catenária, representando o comportamento real de forma mais fidedigna.

Baseado nesse contexto, objetivo deste artigo é apresentar uma metodologia para a obtenção da equação da curva catenária, desenvolvendo um modelo analítico e numérico que descreve os comportamentos das tensões aplicadas aos pontos de fixação de cabos suspensos. Para mostrar tais comportamentos, faz-se a análise para diferentes comprimentos de cabo, definindo a distância horizontal e altura vertical em que esses pontos foram fixados. Um novo procedimento mostra que é possível desenvolver esse modelo para duas situações distintas: Na primeira situação, os pontos de fixação do cabo estão na mesma altura vertical, ou seja, a curva é simétrica. Na segunda situação, os pontos de fixação do cabo estão desnivelados, o que torna a curva não simétrica e a solução um pouco mais trabalhosa. Para ambas situações, é apresentada uma abordagem de método de otimização que determina o comprimento ótimo entre os pontos de sustentação em que a tensão aplicada a esses pontos seja mínima.

## 2 Desenvolvimento

Seja um cabo flexível e inextensível de comprimento  $L$  e densidade linear ( $\rho = \text{massa/comprimento}$ ) uniforme, suspenso entre dois pontos de fixação, não alinhados verticalmente e sujeito à ação de

seu próprio peso (figura 1). A partir do balanço de quantidade de movimento, pode ser mostrado que a curva  $y = f(x)$ , formada pelo cabo suspenso, tem o formato de uma catenária.

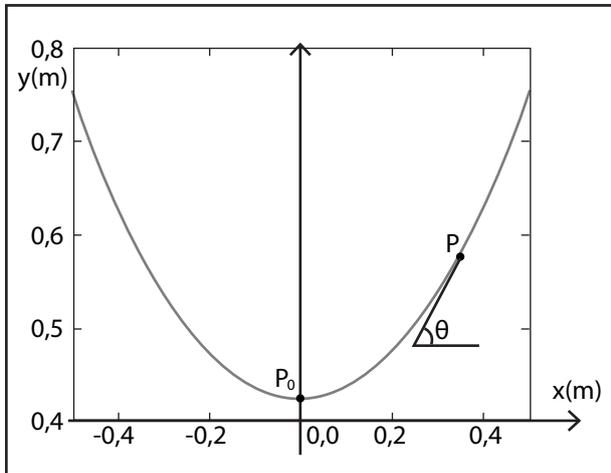


Figura 1 - Perfil da curva catenária formado pelo cabo suspenso  
Fonte: Os autores (2018).

O balanço de quantidade de movimento para a corda equação (1) pode ser feito nas direções  $x$  e  $y$ , considerando o sistema em equilíbrio.

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Os pontos de fixação exercem tensões sobre o cabo nas direções tangenciais à curva. No ponto  $P$ , a tensão que age sobre o cabo é  $T$  e sua direção é dada pelo ângulo  $\theta$  formado entre a reta tangente à curva no ponto  $P$  e o eixo das abcissas. Outra força atuante na corda, é seu peso que exerce uma força vertical, dependente do comprimento da corda até o ponto  $P$ .

A tensão  $T$  é então decomposta, segundo as direções  $x$  e  $y$ , sendo que a reação no ponto  $P_0$  é indicada pela tensão  $T_0$  que não possui componente de força vertical nesse ponto (já que, em  $P_0$ , a reta tangente à corda é paralela ao eixo horizontal). Sendo  $S$ , o comprimento da curva de  $P_0$  até  $P$ , e  $\omega$  a densidade linear (peso/unidade de comprimento) da corda, tem-se:

$$T \cos \theta = T_0 \quad (2)$$

$$T \sin \theta = \omega \cdot S \quad (3)$$

O quociente da equação (3) pela equação (2),  $\tan \theta = \frac{\omega S}{T_0}$ , resulta na derivada de  $y$ , em relação a  $x$  (equação 4).

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta = \frac{\omega S}{T_0} \quad (4)$$

O comprimento  $S$  da corda entre  $P_0(x_0, y_0)$  e  $P(x, y)$  pode ser determinado pela integral de linha expressa por:

$$S(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (5)$$

Substituindo a equação (5) na equação (4), tem-se:

$$f'(x) = \frac{\omega}{T_0} \int_{x_0}^x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (6)$$

Embora o valor de  $\omega$  (peso por unidade de comprimento) seja uma propriedade da corda, o valor de  $T_0$  não é conhecido *a priori* e vai depender do formato da curva assumida pela corda. Como  $\omega$  e  $T_0$  são constantes em relação a  $x$  e  $y$ , essas variáveis são agrupadas, definindo-se um único parâmetro  $\alpha = \frac{\omega}{T_0}$ , a ser posteriormente determinado. Assim:

$$f'(x) = \alpha \int_{x_0}^x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (7)$$

Derivar a equação (7), em relação a  $x$ , origina uma equação diferencial ordinária não linear de segunda ordem (equação 8). Pode-se encontrar solução analítica para essa EDO, que resulta em  $y = f(x)$ , cujo formato é uma curva catenária.

$$f''(x) = \alpha \sqrt{1 + (f'(x))^2} \quad (8)$$

A equação (8) é uma equação diferencial que é função de  $f'(x)$ , podendo ser resolvida então por substituição de variável.

$$\begin{aligned} v &= f'(x) \\ v' &= f''(x) \end{aligned} \quad (9)$$

Reescrevendo a equação (8), incluindo a variável  $v$  e sua derivada  $v'$ , obtém-se:

$$v' = \alpha \sqrt{1 + v^2} \quad (10)$$

A equação (10) pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis (equação 11), sendo que as equações (12) e (13) apresentam respectivamente as soluções implícita e explícita para a variável  $v$ .

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \int \alpha dx \quad (11)$$

$$\text{arc sinh}(v) = \alpha x + c' \quad (12)$$

$$v = \sinh(\alpha x + c') \quad (13)$$

Retornando  $v$  à variável original  $f'(x)$ , por meio da relação  $v = f'(x)$  (equação 9), obtém-se:

$$f'(x) = \sinh(\alpha x + c') \quad (14)$$

Integrando  $y' = f'(x)$  (equação 14) em relação a  $x$ , obtém-se:

$$y = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha x + c') + c \quad (15)$$

A equação (15) apresenta a solução geral do modelo. Observa-se, então, que a catenária possui o formato da função cosseno hiperbólico. Para determinar as soluções particulares, analisam-se duas situações: uma, em que os pontos de fixação do cabo encontram-se na mesma altura (Caso 1) e outra, em que pode existir um desnível, ou seja, diferença de altura entre esses pontos (Caso 2).

### 2.1 Caso 1 – Pontos de fixação a mesma altura

Para o caso em que pontos de fixação do cabo encontram-se na mesma altura, faz-se uma mudança de variável para colocar o ponto de menor altura na corda,  $P_0(0, y_0)$  como ponto de simetria. Assim, para o novo eixo de coordenadas, tem-se que  $f'(0) = 0$ , assim, a solução da equação (14) será:

$$0 = \sinh(\alpha \cdot 0 + c') \quad (16)$$

Portanto, pela equação (16), obtém-se que a constante  $c'$  é igual a 0 ( $c' = 0$ ) para o caso com simetria. Com esse valor, as equações de derivada  $y' = f'(x)$  (equação 17) e de  $y$  (equação 18) podem ser reescritas, a partir das equações (14) e (15).

$$f'(x) = \sinh(\alpha x) \quad (17)$$

$$y = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha x) + c \quad (18)$$

Adotando que os pontos  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$  sustentam a corda à mesma altura, ou seja,  $y_1 = y_2$ , a curva é simétrica com ponto mínimo  $P_0(0, y_0)$ , conforme mostrado na figura 2.

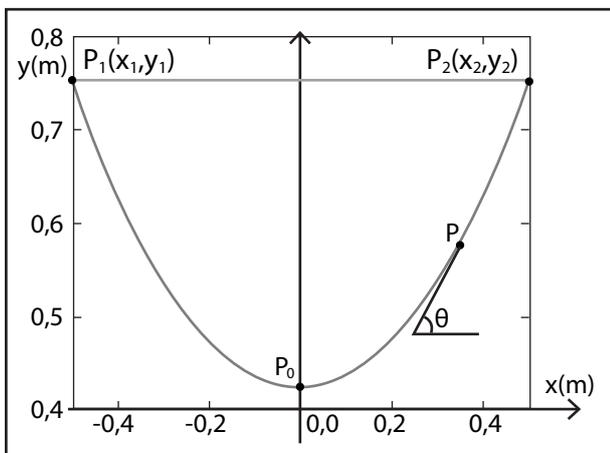


Figura 2 - Curva Catenária com os pontos  $P_1$  e  $P_2$  no mesmo nível ( $y_1 = y_2$ )  
Fonte: Os autores (2018)

Encontra-se o valor de  $\alpha$ , a partir da informação do comprimento da corda ( $S$ ) e da distância horizontal entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , denominado  $\Delta x$ . Por simetria, para  $\frac{\Delta x}{2}$ , o comprimento correspondente é  $\frac{L}{2}$ , e substituindo a equação (17) em (5), tem-se:

$$S\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \sqrt{1 + (\sinh(\alpha x))^2} dx = \frac{L}{2} \quad (19)$$

Usando a propriedade das funções trigonométricas hiperbólicas, a equação (19) pode ser modificada, dado que a função cosseno hiperbólico é uma função sempre positiva, ou seja,  $\cosh(x) \geq 0, \forall x$ :

$$\int_0^{\frac{\Delta x}{2}} |\cosh(\alpha x)| dx = \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \cosh(\alpha x) dx = \frac{L}{2} \quad (20)$$

Integrando a equação (20), encontra-se a equação (21) que é função de  $\alpha$ , valor a determinar, assim como função de  $\Delta x$  e  $L$ , valores conhecidos do problema.

$$\frac{1}{\alpha} \sinh\left(\alpha \frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{L}{2} \quad (21)$$

Logo, para determinar o valor do parâmetro  $\alpha$ , é necessário encontrar a raiz de  $g(\alpha)$ .

$$g(\alpha) = \frac{\left(\sinh\left(\alpha \frac{\Delta x}{2}\right)\right)}{\alpha} - \frac{L}{2} \quad (22)$$

Observa-se que  $g(\alpha)$  é não linear e  $\alpha$  não pode ser explicitado analiticamente. Assim, faz-se necessário o emprego de um método numérico para a determinação dessa raiz. Neste trabalho, emprega-se uma implementação do método de Newton-Raphson, que, segundo Gilat e Subramaniam (2008), esse método converge rapidamente, quando bem sucedido. A condição para a convergência é que a estimativa inicial da raiz esteja próxima o suficiente da solução. No caso da equação (22), esse método convergiu para todas as situações testadas com a estimativa inicial:  $\alpha = 1$ .

O valor da constante  $c$  da equação (18) pode ser determinado, utilizando um dos dois pontos de fixação da corda. Considerando o ponto  $P_2\left(\frac{\Delta x}{2}, y_2\right)$ :

$$c = y_2 - \frac{1}{\alpha} \cosh\left(\alpha \frac{\Delta x}{2}\right) \quad (23)$$

Uma informação importante é o módulo da tensão na corda em toda sua extensão entre os pontos de fixação. A equação (2) pode ser rearranjada para escrever a tensão normalizada pela densidade linear  $\omega$  em função de  $\alpha$  e  $\theta$ .

$$\frac{T}{\omega} = \frac{1}{\alpha W W \cos(\theta)} \quad (24)$$

Em muitos problemas que envolvem a curva catenária, além do formato da curva, há interesse no valor máximo de tensão na corda. Percebe-se que o ângulo que dará a tensão máxima será o valor de  $\theta$  correspondente aos pontos de fixação. Para encontrar o valor de  $\theta_2$ , dado pela equação (26), utiliza-se a relação entre a derivada da função calculada no ponto  $P_2(\frac{\Delta x}{2}, y_2)$  e a tangente do ângulo no respectivo ponto (equação 25).

$$f'(\frac{\Delta x}{2}) = \tan \theta_2 = \sinh\left(\alpha \frac{\Delta x}{2}\right) \quad (25)$$

$$\theta_2 = \arctan\left[\sinh\left(\alpha \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \quad (26)$$

Um caso particular com propriedades interessantes para esse problema simétrico pode ser obtido, se a origem do sistema de coordenadas estiver em  $y_2 = \frac{1}{\alpha}$  e  $x_0 = 0$ . Pode-se demonstrar que, nesse caso, o valor da constante da equação (18) será  $c = 0$ . Coll e Dodd (2016) mostram que, nessa situação, a catenária apresenta a propriedade de que o comprimento de arco  $L$ , entre dois pontos no intervalo  $[x_1, x_2]$ , é proporcional à área abaixo da curva nesse mesmo intervalo. Mais além, a constante de proporcionalidade é igual a  $\alpha$ .

### 2.2 Caso 2 – Pontos de fixação a alturas diferentes

Adota-se, nesse caso, que os pontos  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$  que sustentam o cabo não estão na mesma altura, ou seja,  $y_1 \neq y_2$ . Assim, a curva não é mais simétrica entre os pontos de sustentação. O ponto  $P_0(x_0, y_0)$  é desconhecido, mas pode ser determinado mesmo que pertença ou não à curva. Assim, faz-se uma translação de eixo para colocar  $x_0$  na origem do eixo transladado para escrever as funções  $S$  e  $y$ , em função de  $\alpha$  e  $x_0$ .

$$S(\alpha, x_0) = \int_{x_1-x_0}^{x_2-x_0} \sqrt{1 + \{\sinh[\alpha(x - x_0)]\}^2} dx = L \quad (27)$$

A solução geral dada pela equação (28) também é transladada, ficando em função de  $\alpha$ ,  $x_0$  e  $c$ .

$$y(x) = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha(x - x_0)) + c \quad (28)$$

Como se tem três variáveis desconhecidas ( $\alpha$ ,  $x_0$  e  $c$ ), são necessárias três equações para resolver o problema. Essas equações advêm da equação (27), dado que o comprimento de corda  $L$  é conhecido e da equação (28), utilizando os pontos  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$ .

$$\begin{cases} \int_{x_1-x_0}^{x_2-x_0} \sqrt{1 + \{\sinh[\alpha(x - x_0)]\}^2} dx = L \\ \frac{1}{\alpha} \cosh[\alpha(x_1 - x_0)] + c = y_1 \\ \frac{1}{\alpha} \cosh[\alpha(x_2 - x_0)] + c = y_2 \end{cases} \quad (29)$$

Tem-se, então, um sistema (equação 29) com três equações não lineares e três incógnitas. Esse sistema não possui solução analítica e deve ser resolvido numericamente. Para a solução numérica, foi empregada uma implementação do método de Newton-Raphson multidimensional. As estimativas iniciais das raízes, empregadas em todas as situações, foram:  $\alpha = 1$ ,  $x_0$  e  $c = 1$ . De forma equivalente ao Caso 1, o valor da tensão máxima também é calculado, utilizando a equação (24), entretanto, nesse caso, o ângulo  $\theta$  é calculado, utilizando a translação de eixos:

$$\theta_2 = \arctan[\sinh(\alpha(x_2 - x_0))] \quad (30)$$

O valor de  $x_2$  foi utilizado na equação (30) porque em todas as simulações o valor de  $y_2$  era superior a  $y_1$  e, portanto, a maior tensão estará em  $P_2$  (ponto de fixação mais elevado). Em caso contrário, ou seja,  $y_1 > y_2$ ,  $x_2$  deverá ser substituído por  $x_1$  na equação (30).

### 3 Resultados e discussões

Para se obter a equação da curva catenária, é necessário determinar as constantes desconhecidas, considerando que os dados que se tem *a priori* são o comprimento  $L$ . Os pontos de fixação  $P_1$  e  $P_2$ , e consequentemente,  $\Delta x$ , também são conhecidos. Assim, é possível descrever o comportamento das tensões aplicadas à corda, fazendo-se análise para diferentes comprimentos de cabo, mantendo os pontos de fixação  $P_1$  e  $P_2$  com as mesmas coordenadas.

#### 3.1 Caso 1 – Pontos de fixação à mesma altura

Para analisar o caso em que os pontos de fixação estão a mesma altura, foram considerados os pontos  $P_1$  e  $P_2$  com coordenadas  $(-0,5;1)$  e  $(0,5;1)$ , respectivamente. Para o caso em que  $y_1 = y_2$ , problema simétrico  $x_0$  é conhecido, sendo a média entre  $x_1$  e  $x_2$ . Como é simétrico, é conveniente colocar a curva simetricamente ao eixo  $y$ , o que nos dá  $x_0 = 0$  para os pontos dados.

Assim, tem-se a equação que é função de  $\alpha$ , sendo que para determinar o valor desse parâmetro é necessário encontrar as raízes da equação (22). A

constante  $c$  é determinada, utilizando como condição de contorno o ponto  $P_2$  (equação 23). Para diferentes comprimentos de corda  $L$ , os valores de  $\alpha$ ,  $c$ ,  $y_0$ ,  $\theta_2$ ,  $T_2/\omega$  foram calculados. Uma observação importante é que, para o cálculo numérico ser

realizado, a corda tem que ter tamanho maior do que a distância entre os dois pontos. Do contrário, o problema físico não tem solução, e o problema numérico não converge. Os valores encontrados são mostrados na tabela 1.

Tabela 1- Valores numéricos encontrados para  $y_1 = y_2$

$L (m)$	$\alpha (m^{-1})$	$c (m)$	$y_0 (m)$	$\theta_2 (rad)$	$\frac{T_2}{\omega} L (m)$
1,05	1,0874	-0,0589	0,8607	0,5187	1,0589
1,1	1,5268	0,1447	0,7997	0,6985	0,8553
1,2	2,1297	0,2381	0,7077	0,9068	0,7619
1,5	3,2443	0,1891	0,4974	1,1809	0,8109
2,0	4,3546	0,0260	0,2036	1,3451	1,0260
2,35	4,9037	-0,1926	0,0114	1,399	1,1926
1,2577	2,3994	0,2456	0,6623	0,9855	0,7544

Fonte: Os autores (2018).

Os valores de  $\alpha$  e  $c$  encontrados para valores de  $L$  iguais a 1,1, 1,2, 1,5, 2,0 e 2,35 m são mostrados na tabela 1 e foram levados na equação (18), para

traçar os perfis das catenárias, para os respectivos comprimentos de arco. Os perfis são apresentados na figura 3.

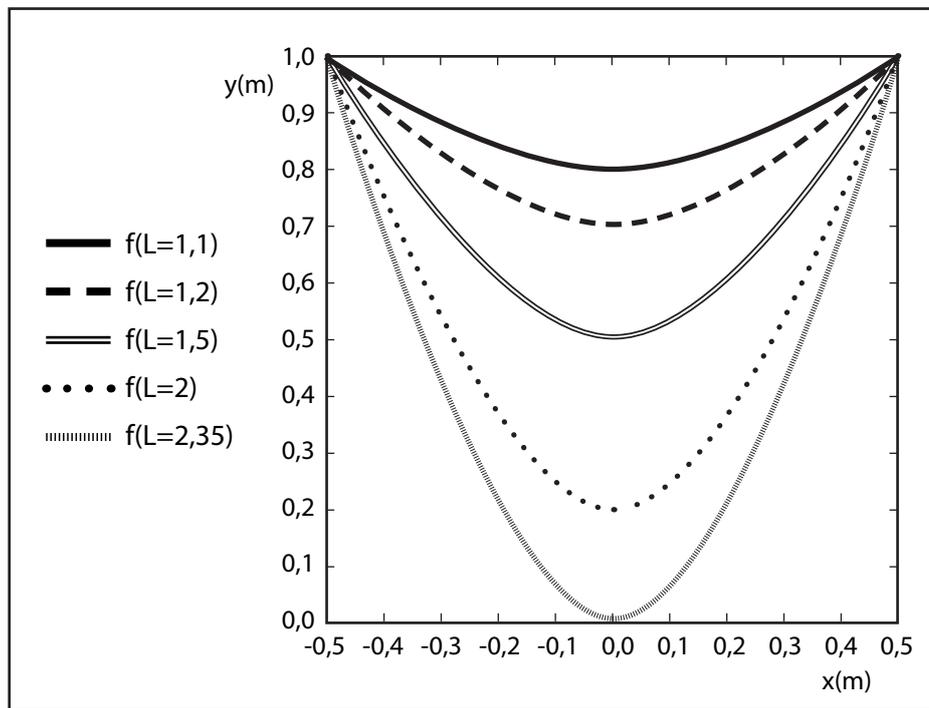


Figura 3 - Perfis das catenárias com os valores encontrados para  $y_1 = y_2$ .  
Fonte: Os autores (2018).

Com o aumento do comprimento do arco  $L$ , observa-se que  $y_0$  diminui. Verifica-se que, quando  $c = 0$ , tem-se  $y_0, 1/\alpha$  como reportado

por Simmons (1987, p. 613). Partindo da equação (21), pode-se escrever uma função  $L(\alpha)$ :

$$L(\alpha) = \frac{2}{\alpha} \sinh\left(\alpha \frac{\Delta x}{2}\right) \quad (31)$$

Para que a função  $L(\alpha)$  seja monotônica crescente, é necessário que  $L'(\alpha) \geq 0, \forall \alpha > 0$ . Calculando então  $L'(\alpha)$ :

$$L'(\alpha) = \frac{\Delta x}{\alpha} \cosh\left(\alpha \frac{\Delta x}{2}\right) - \frac{2}{\alpha^2} \sinh\left(\alpha \frac{\Delta x}{2}\right) \geq 0 \quad (32)$$

Como  $\alpha > 0$ , pode-se rearranjar a equação (32):

$$\Delta x \cosh\left(\alpha \frac{\Delta x}{2}\right) \geq \frac{2}{\alpha} \sinh\left(\alpha \frac{\Delta x}{2}\right) \quad (33)$$

$$\tanh\left(\alpha \frac{\Delta x}{2}\right) \leq \alpha \frac{\Delta x}{2} \quad (34)$$

Como  $\tanh(x)$  é sempre menor ou igual a  $x$ , para todo  $x \geq 0$ , prova-se que, com o aumento de  $\alpha$ , o comprimento  $L$  aumenta (tabela 1).

Além disso, pela definição do parâmetro  $\alpha (\alpha = \frac{\omega}{T_0})$ , como  $\omega$  é constante, então, quer dizer que  $T_0$  diminui com o aumento do comprimento  $L$  da corda. Entretanto, o ângulo  $\theta_2$  tende a aumentar, sendo que está compreendido entre 0 e 90°. Consequentemente,  $\cos(\theta_2)$  diminui de 1 a 0. Ou seja, há duas maneiras de se zerar o denominador da equação (24):

1.  $\alpha = 0$ , o que corresponde a um  $\theta_2$  de 0. Nessa situação, quando o comprimento é igual a  $\Delta x$ , o valor para manter a corda na horizontal tende a infinito, ou seja, o módulo da tensão  $T$ , que corresponde a  $T_0$ , tende a infinito;
2.  $\cos(\theta_2) = 0$ , o que corresponde a se ter uma corda suspensa infinita, necessitando, então de tensão  $T$  de módulo infinito para sustentá-la.

Observa-se, então, que as grandezas  $\alpha$  e  $\cos(\theta_2)$  são inversamente proporcionais. Há um valor máximo da multiplicação dos dois termos que corresponde a uma tensão mínima equivalente. Esse valor mínimo pode ser avaliado com base em  $T_0$ , mas também pode ser avaliado nas extremidades da corda, pontos no quais a tensão terá maior módulo.

O valor ótimo de comprimento da corda que permitirá uma tensão em módulo mínima nos pontos fixos foi determinado por meio de uma implementação do método de Newton de otimização (EDGAR; HIMMELBLAU; LASDON, 2001). O valor encontrado, que permitirá a menor tensão para o  $\Delta x$  em questão com  $y_1 = y_2$ , foi um comprimento de corda de  $L = 1,2577 \text{ m}$  com módulo da tensão equivalente a  $T_2/\omega = 0,7544 \text{ m}$ .

### 3.2 Caso 2 – Pontos de fixação a alturas diferentes

Em aplicações práticas, os pontos  $P_1$  e  $P_2$  não necessariamente precisam ter a mesma altura ( $y_1 \neq y_2$ ). Mesmo assim, como a corda é flexível, o perfil assumido pela mesma, entre dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  de diferentes alturas, sempre será parte do perfil formado por uma corda com o mesmo  $\alpha$ , entre 2 pontos de igual altura maior que  $y_1$  e  $y_2$ . Assim, o ponto  $P_0(x_0, y_0)$  que possui derivada nula, pode ser determinado pertencendo ou não à curva. Similar ao Caso 1, para diferentes comprimentos de corda  $L$ , os valores de  $\alpha$ ,  $c$ ,  $x_0$ ,  $\theta_2$ ,  $T_2/\omega$  foram calculados numericamente, considerando agora pontos com alturas diferentes com  $\Delta x = 1$ . Os valores encontrados são mostrados na tabela 2.

Tabela 1- Valores numéricos encontrados para  $y_1 \neq y_2$

$y_1 (m)$	$y_2 (m)$	$L (m)$	$\alpha (m^{-1})$	$c (m)$	$y_0 (m)$	$\theta_2 (rad)$	$\frac{T_2}{\omega} (m)$
0,5	1	1,5	2,9829	-0,0800	-0,1162	1,2552	1,08
0,5	1	1,4	2,6048	-0,0617	-0,1434	1,2008	1,0617
0,5	1	1,3	2,1297	-0,0754	-0,1904	1,1189	1,0754
0,5	1	1,2	1,4573	-0,2142	-0,3044	0,9702	1,2142
0,5	1	1,119	0,1610	-6,2168	-2,9866	0,5338	7,2168
0,5	1	1,3765	2,5039	-0,0608	-0,152	1,1848	1,0608
0	1	1,55	2,0486	-0,5044	-0,3744	1,2403	1,5044
0	1	1,6729	2,7312	-0,4530	-0,2525	1,3161	1,4530

Fonte: Os autores (2018).

As curvas para os valores mostrados na tabela 2 foram inseridos na equação 28, e os perfis das

catenárias foram traçados (figura 4). As análises dos valores encontrados para o Caso 2 seguem de

maneira equivalente ao Caso 1. Observa-se que para o mesmo  $\Delta x$  e, considerando o mesmo comprimento de corda  $L$ , quanto maior o desnível,

maior a tensão na corda. Quando aproximamos o valor do comprimento à distância entre os dois pontos  $P_1$  e  $P_2$ .

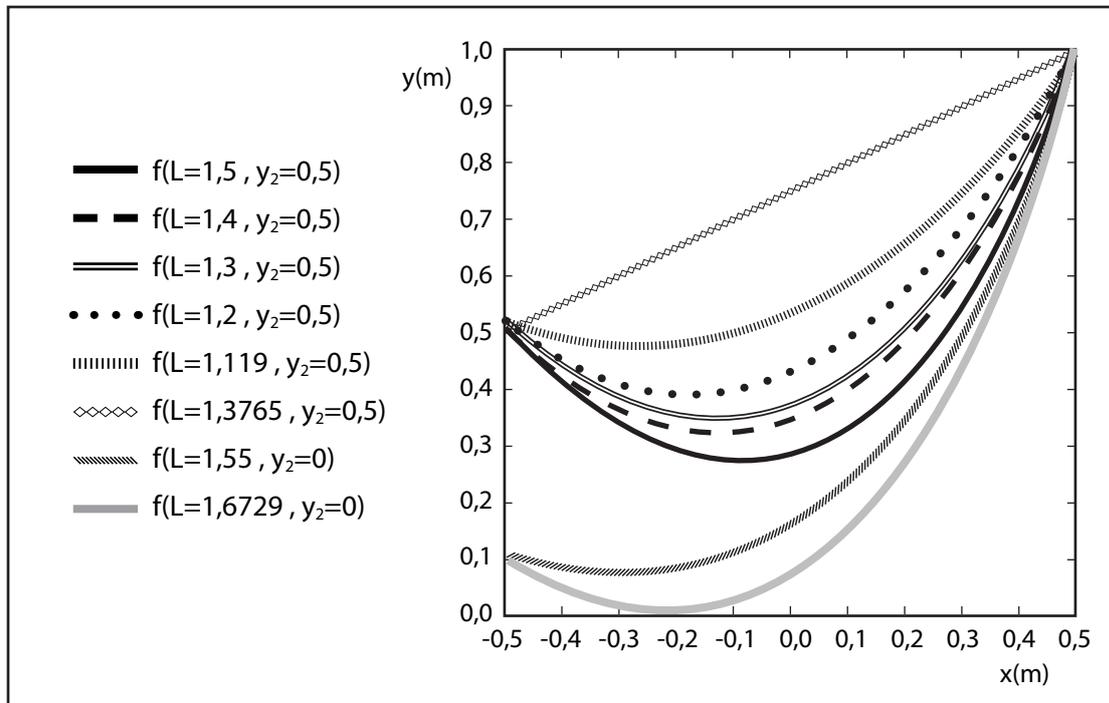


Figura 4 - Perfis das catenárias com os valores encontrados para  $y_1 \neq y_2$ .  
Fonte: Os autores (2018).

Utilizando uma implementação do método de Newton de otimização (EDGAR; HIMMELBLAU; LASDON, 2001) para determinar a menor tensão possível para pontos de sustentação com alturas diferentes com  $\Delta x = 1$ , os valores ótimos de comprimento de corda determinados pelo algoritmo foram  $L = 1,3765$  m, considerando  $y_1 = 0,5$  m e  $y_2 = 1$  m e  $L = 1,6729$  m para  $y_1 = 0$  m e  $y_2 = 1$  m.

#### 4 Conclusão

A metodologia proposta permite determinar o perfil da curva de uma catenária, a partir de dois pontos quaisquer de fixação da corda. Através do perfil, pode-se determinar o valor máximo da tensão na corda. Os resultados indicam que se a corda entre os dois pontos estiver muito esticada (menor comprimento possível), a tensão será muito elevada, estando os pontos de sustentação da mesma no mesmo nível ou desnivelados. Por outro lado, se o comprimento da corda for muito longo, seu grande peso também provocará tensões elevadas. Tendo em vista o projeto de linhas de transmissão, faz-se necessário, além de analisar as vibrações nos condutores suspensos, definir o espaçamento, assim como o

comprimento de cabo entre torres de fixação. Dado que as extremidades da corda são os pontos nos quais a tensão terá maior módulo, há um determinado comprimento que apresenta um valor mínimo de tensão equivalente para tais pontos. Um método de otimização pode ser usado para determinar o comprimento ótimo para os casos em que os pontos de sustentação estão a mesma altura ou a alturas diferentes.

#### Referências

- COLL, E. V.; DODD, J. A characteristic averaging property of the catenary: source. **The American Mathematical Monthly**, v. 123, n. 7, p. 683-688, 2016.
- EDGAR, T. F.; HIMMELBLAU, D. M.; LASDON, L. S. **Optimization of chemical process**. 2th.ed. New York: McGraw Hill, 2001.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.
- GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Numerical methods for engineers and scientists**: an

introduction with applications using MATLAB. Hoboken: John Wiley & Sons, 2008.

GINOVART, J. L. *et al.* Layout of catenary arches in the spanish enlightenment and modernism. **Nexus Network Journal**, v. 19, p. 85-99, 2017.

GRECO, L.; IMPOLLONIA, N.; CUOMO, M. A procedure for the static analysis of cable structures following elastic catenary theory. **International Journal of Solids and Structures**, v. 51, p. 1521-1533, 2014.

MANSOUR, A. *et al.* Catenary-induced geometric nonlinearity effects on cable linear vibrations. **Journal of Sound and Vibration**, v. 413, p. 332-353, 2018.

MENDES, M. F. **A curva catenária como aplicação da função exponencial**. 2017. 81 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas) - Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2017.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com geometria analítica**. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1987. v. 1.

SUCH, M. *et al.* A procedure for the static analysis of cable structures following elastic catenary theory. **Engineering Structures**, v. 31, p. 2162-2170, 2009.

TALAVERA, L. M. B. **Parábola e catenária: história e aplicações**. 2008. 97 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

